Exercice 1 **4 points**

Un étudiant mange tous les jours au restaurant universitaire. Ce restaurant propose des plats végétariens et des plats non végétariens.

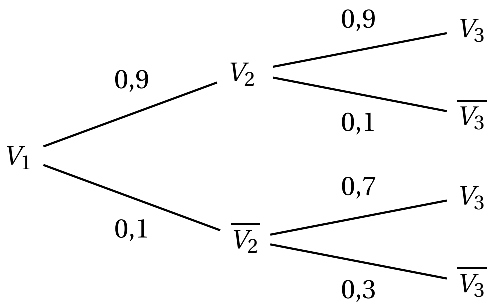
- Lorsqu'un jour donné l'étudiant a choisi un plat végétarien, la probabilité qu'il choisisse un plat végétarien le lendemain est 0,9.
- Lorsqu'un jour donné l'étudiant a choisi un plat non végétarien, la probabilité qu'il choisisse un plat végétarien le lendemain est 0,7.

Pour tout entier naturel n, on note V_n, l'évènement « l'étudiant a choisi un plat végétarien le n-ième jour » et p_n la probabilité de V_n.

Le jour de la rentrée, l'étudiant a choisi le plat végétarien. On a donc $p_1 = 1$.

1. **a.** Lorsqu'un jour donné l'étudiant a choisi un plat végétarien, la probabilité qu'il choisisse un plat végétarien le lendemain est 0,9. Or $p_1 = 1$ donc $p_2 = 0{,}9$.

b. $p_3 = P(V_3)$. On représente la situation par un arbre pondéré.



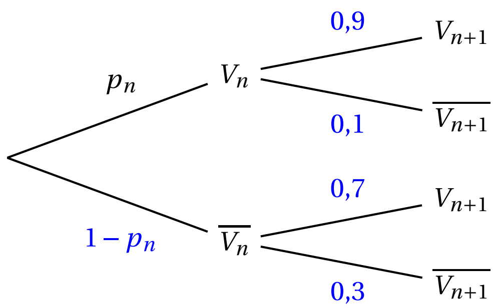
$\left\{V_2\,,\,\overline{V_2}\right\}$ forme une partition donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$p_3 = P(V_3) = P(V_2 \cap V_3) + P\left(\overline{V_2} \cap V_3\right) = P(V_2) \times P_{V_2}(V_3) + P\left(\overline{V_2}\right) \times P_{\overline{V_2}}(V_3)$$
$$= 0{,}9 \times 0{,}9 + 0{,}1 \times 0{,}7 = 0{,}88$$

c. Sachant que le 3^e^ jour l'étudiant a choisi un plat végétarien, la probabilité qu'il ait choisi un plat non végétarien le jour précédent est :

$$P_{V_3}\left(\overline{V_2}\right) = \frac{P\left(\overline{V_2} \cap V_3\right)}{P(V_3)} = \frac{0{,}1 \times 0{,}7}{0{,}88} = \frac{7}{88} \approx 0{,}08 \text{ au centième près.}$$

2. On complète l'arbre pondéré ci-dessous :



3. $\left\{V_n\,,\,\overline{V_n}\right\}$ forme une partition donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$p_{n+1} = P\left(V_{n+1}\right) = P\left(V_n \cap V_{n+1}\right) + P\left(\overline{V_n} \cap V_{n+1}\right) = P\left(V_n\right) \times P_{V_n}\left(V_{n+1}\right) + P\left(\overline{V_n}\right) \times P_{\overline{V_n}}\left(V_{n+1}\right)$$
$$= p_n \times 0{,}9 + \left(1-p_n\right) \times 0{,}7 = 0{,}9p_n + 0{,}7 - 0{,}7p_n = 0{,}2p_n + 0{,}7$$

4. On souhaite disposer de la liste des premiers termes de la suite (p_n) pour $n \geqslant 1$.

Pour cela, on utilise une fonction appelée `repas` programmée en langage Python dont on propose trois versions, indiquées ci-dessous.

Programme 1
```
def repas(n):
  p=1
  L=[p]
  for k in range(1,n):
    p = 0.2*p+0.7
    L.append(p)
  return(L)
```

Programme 2
```
def repas(n):
  p=1
  L=[p]
  for k in range(1,n+1):
    p = 0.2*p+0.7
    L.append(p)
  return(L)
```

Programme 3
```
def repas(n):
  p=1
  L=[p]
  for k in range(1,n):
    p=0.2*p+0.7
    L.append(p+1)
  return(L)
```

a. Le programme qui permet d'afficher les n premiers termes de la suite (p_n) est le n° 1.

En effet, le n° 2 donne $n+1$ termes, et le n° 3 donne des valeurs supérieures à 1.

b. Avec le programme n° 1, le résultat affiché pour $n=5$ sera la liste $\left[p_1\,,\,p_2\,,\,p_3\,,\,p_4\,,\,p_5\right]$.

$p_1 = 1$; $p_2 = 0{,}9$; $p_3 = 0{,}88$; $p_4 = 0{,}2p_3 + 0{,}7 = 0{,}2 \times 0{,}88 + 0{,}7 = 0{,}876$ et
$p_5 = 0{,}2p_4 + 0{,}7 = 0{,}2 \times 0{,}876 + 0{,}7 = 0{,}8752$

Le résultat affiché par `repas(5)` sera donc $[1\,;\,0{,}9\,;\,0{,}88\,;\,0{,}876\,;\,0{,}8752]$.

5. On va démontrer par récurrence que $p_n = 0{,}125 \times 0{,}2^{n-1} + 0{,}875$, pour tout naturel $n \geqslant 1$.

- **Initialisation**

  Pour $n=1$, on a : $0{,}125 \times 0{,}2^{1-1} + 0{,}875 = 0{,}125 + 0{,}875 = 1$.

  Or $p_1 = 1$, donc la propriété est vraie pour $n=1$.

- **Hérédité**

  On suppose la propriété vraie au rang n c'est-à-dire que $p_n = 0{,}125 \times 0{,}2^{n-1} + 0{,}875$; c'est l'hypothèse de récurrence.

  $$p_{n+1} = 0{,}2p_n + 0{,}7 = 0{,}2\left(0{,}125 \times 0{,}2^{n-1} + 0{,}875\right) + 0{,}7$$
  $$= 0{,}125 \times 0{,}2^{n} + 0{,}2 \times 0{,}875 + 0{,}7 = 0{,}125 \times 0{,}2^{n} + 0{,}175 + 0{,}7$$
  $$= 0{,}125 \times 0{,}2^{n} + 0{,}875$$

  La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 1 et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 1$; d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier n non nul.

On a donc démontré par récurrence que $p_n = 0{,}125 \times 0{,}2^{n-1} + 0{,}875$ pour tout $n \geqslant 1$.

6. $-1 < 0{,}2 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}2^{n-1} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}125 \times 0{,}2^{n-1} + 0{,}875 = 0{,}875$

La limite de la suite (p_n) est donc 0,875.